

び $\Delta_{-i,i} = \Delta'_{i,-i}$ に関して集約すると, (やや面倒な計算の後) 集約対数尤度関数 (concentrated log-likelihood function) は,

$$\log L^*(\alpha_i, \sigma_{ii}) = \text{定数} - \frac{T}{2} \log \sigma_{ii} + \frac{T}{2} \log \left(\frac{\gamma'_i Y' Q_X Y \gamma_i}{T} \right) - \frac{1}{2} \log |Y' Q_X Y| - \frac{1}{2\sigma_{ii}} \alpha'_i Z' Z \alpha_i$$

で与えられる。ここで, これまでと同様, $Z \equiv (X, Y)$, $Q_X \equiv I_T - X(X'X)^{-1}X'$ である。 σ_{ii} に関する最大化の一階の条件より

$$\sigma_{ii} = \frac{\alpha'_i Z' Z \alpha_i}{T} \quad (10.55)$$

が得られるので, これを代入して $\log L^*$ をさらに集約し, その集約対数尤度関数を $\log L^{**}$ で表すと

$$\log L^{**}(\alpha_i) = \text{定数} - \frac{1}{2} \log |Y' Q_X Y| - \frac{T}{2} \log \left(\frac{\alpha'_i Z' Z \alpha_i}{\gamma'_i Y' Q_X Y \gamma_i} \right) \quad (10.56)$$

を得る。

したがって, α_i に関する尤度の最大化は

$$\frac{\alpha'_i Z' Z \alpha_i}{\gamma'_i Y' Q_X Y \gamma_i} = \frac{\alpha'_i Z' Z \alpha_i}{\alpha'_i Z' Q_X Z \alpha_i}$$

の最小化に帰着する。ここで, $Q_X Z = (Q_X Y, Q_X X) = (Q_X Y, O)$ を使った。ゆえに, 事前制約 (10.35) のもとでの, α_i に関する尤度最大化問題は

$$\begin{aligned} \min_{\alpha_i} & \frac{\alpha'_i Z' Z \alpha_i}{\alpha'_i Z' Q_X Z \alpha_i} \\ \text{s.t.} & R_i \alpha_i = q_i \end{aligned}$$

に等しい。連立方程式モデル (10.12) において第 i 構造方程式は事前制約 (10.35) によって識別されるものと仮定する。この問題をラグランジュ未定乗数法を使って解く代わりに, ここでも (10.36) を利用しよう。(10.36) を代入すると, 上記の問題は

$$\min_{a_i} \frac{(\eta_{(i)} - Z_{(i)} a_i)' (\eta_{(i)} - Z_{(i)} a_i)}{(\eta_{(i)} - Z_{(i)} a_i)' Q_X (\eta_{(i)} - Z_{(i)} a_i)} \quad (10.57)$$

となる。この問題の解 \hat{a}_i が, a_i の制限情報最尤推定量 (limited information maximum likelihood (LIML) estimator) である。 α_i の LIML 推定量は, \hat{a}_i を (10.36) に代入して, また, σ_{ii} の LIML 推定量は (10.55) に \hat{a}_i を代入して得られる。

(10.57) において最小化される関数を

$$\lambda(a_i) \equiv \frac{(\eta_{(i)} - Z_{(i)} a_i)' (\eta_{(i)} - Z_{(i)} a_i)}{(\eta_{(i)} - Z_{(i)} a_i)' Q_X (\eta_{(i)} - Z_{(i)} a_i)} \quad (10.58)$$

とおくと

$$(\eta_{(i)} - Z_{(i)} a_i)' (\eta_{(i)} - Z_{(i)} a_i) - \lambda(a_i) (\eta_{(i)} - Z_{(i)} a_i)' Q_X (\eta_{(i)} - Z_{(i)} a_i) \equiv 0$$

を得る。これは恒等的な関係だから, 両辺を a_i の各成分で偏微分しても等号は成り立たねばならない。すなわち,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_i} (\eta_{(i)} - Z_{(i)} a_i)' (\eta_{(i)} - Z_{(i)} a_i) & - \lambda(a_i) \frac{\partial}{\partial a_i} (\eta_{(i)} - Z_{(i)} a_i)' Q_X (\eta_{(i)} - Z_{(i)} a_i) \\ & + \frac{\partial \lambda}{\partial a_i} (a_i) (\eta_{(i)} - Z_{(i)} a_i)' Q_X (\eta_{(i)} - Z_{(i)} a_i) = 0 \end{aligned}$$