び $\Delta_{-i,i} = \Delta'_{i,-i}$ に関して集約すると，(やや面倒な計算の後) 集約対数尤度関数 (concentrated log-likelihood function) は，

$$\log L^*(\alpha_i, \sigma_{ii}) = \text{定数} - \frac{T}{2}\log\sigma_{ii} + \frac{T}{2}\log\left(\frac{\gamma_i' Y' Q_X Y \gamma_i}{T}\right) - \frac{1}{2}\log|Y' Q_X Y| - \frac{1}{2\sigma_{ii}}\alpha_i' Z' Z \alpha_i$$

で与えられる。ここで，これまでと同様，$Z \equiv (X, Y)$, $Q_X \equiv I_T - X(X'X)^{-1}X'$ である。σ_{ii} に関する最大化の一階の条件より

$$\sigma_{ii} = \frac{\alpha_i' Z' Z \alpha_i}{T} \tag{10.55}$$

が得られるので，これを代入して $\log L^*$ をさらに集約し，その集約対数尤度関数を $\log L^{**}$ で表すと

$$\log L^{**}(\alpha_i) = \text{定数} - \frac{1}{2}\log|Y' Q_X Y| - \frac{T}{2}\log\left(\frac{\alpha_i' Z' Z \alpha_i}{\gamma_i' Y' Q_X Y \gamma_i}\right) \tag{10.56}$$

を得る。

したがって，α_i に関する尤度の最大化は

$$\frac{\alpha_i' Z' Z \alpha_i}{\gamma_i' Y' Q_X Y \gamma_i} = \frac{\alpha_i' Z' Z \alpha_i}{\alpha_i' Z' Q_X Z \alpha_i}$$

の最小化に帰着する。ここで，$Q_X Z = (Q_X Y, Q_X X) = (Q_X Y, O)$ を使った。ゆえに，事前制約 (10.35) のもとでの，α_i に関する尤度最大化問題は

$$\begin{aligned} &\min_{\alpha_i} \quad \frac{\alpha_i' Z' Z \alpha_i}{\alpha_i' Z' Q_X Z \alpha_i} \\ &\text{s.t.} \quad R_i \alpha_i = q_i \end{aligned}$$

に等しい。連立方程式モデル (10.12) において第 i 構造方程式は事前制約 (10.35) によって識別されるものと仮定する。この問題をラグランジュ未定乗数法を使って解く代わりに，ここでも (10.36) を利用しよう。(10.36) を代入すると，上記の問題は

$$\min_{a_i} \frac{(\eta_{(i)} - Z_{(i)} a_i)'(\eta_{(i)} - Z_{(i)} a_i)}{(\eta_{(i)} - Z_{(i)} a_i)' Q_X (\eta_{(i)} - Z_{(i)} a_i)} \tag{10.57}$$

となる。この問題の解 $\hat{a}_i$ が，a_i の**制限情報最尤推定量** (limited information maximum likelihood (LIML) estimator) である。α_i の LIML 推定量は，$\hat{a}_i$ を (10.36) に代入して，また，σ_{ii} の LIML 推定量は (10.55) に $\hat{\alpha}_i$ を代入して得られる。

(10.57) において最小化される関数を

$$\lambda(a_i) \equiv \frac{(\eta_{(i)} - Z_{(i)} a_i)'(\eta_{(i)} - Z_{(i)} a_i)}{(\eta_{(i)} - Z_{(i)} a_i)' Q_X (\eta_{(i)} - Z_{(i)} a_i)} \tag{10.58}$$

とおくと

$$(\eta_{(i)} - Z_{(i)} a_i)'(\eta_{(i)} - Z_{(i)} a_i) - \lambda(a_i)(\eta_{(i)} - Z_{(i)} a_i)' Q_X (\eta_{(i)} - Z_{(i)} a_i) \equiv 0$$

を得る。これは恒等的な関係だから，両辺を a_i の各成分で偏微分しても等号は成り立たねばならない。すなわち，

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_i}(\eta_{(i)} - Z_{(i)} a_i)'(\eta_{(i)} - Z_{(i)} a_i) \quad &- \quad \lambda(a_i)\frac{\partial}{\partial a_i}(\eta_{(i)} - Z_{(i)} a_i)' Q_X (\eta_{(i)} - Z_{(i)} a_i) \\ &+ \quad \frac{\partial \lambda}{\partial a_i}(a_i)(\eta_{(i)} - Z_{(i)} a_i)' Q_X (\eta_{(i)} - Z_{(i)} a_i) = 0 \end{aligned}$$

