さて，(11.2) の両辺の vec をとり，補題 11.2 (iii) を使うと

$$\begin{aligned}\mathrm{vec}(Y) &= (I_n \otimes X)\mathrm{vec}(B) + \mathrm{vec}(U)\\ \underline{y} &= \underline{X}\beta + \underline{u} \end{aligned} \tag{11.3}$$

となる。ここで $\underline{y} \equiv \mathrm{vec}(Y)$, $\underline{X} \equiv (I_n \otimes X)$, $\beta \equiv \mathrm{vec}(B)$, $\underline{u} \equiv \mathrm{vec}(U)$ とおいた。$u_{(j)} \equiv (u_{j1}, \cdots, u_{jT})'$ $(j = 1, \cdots, n)$ と定義すれば，$U = (u_{(1)}, \cdots, u_{(n)})$ であるから，誤差項に関する**仮定** 3^+ より，

$$E\underline{u}\,\underline{u}' = \begin{pmatrix} u_{(1)} \\ \vdots \\ u_{(n)} \end{pmatrix} (u'_{(1)}, \cdots, u'_{(n)}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}I_T & \cdots & \sigma_{1n}I_T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1}I_T & \cdots & \sigma_{nn}I_T \end{pmatrix} = \Sigma_u \otimes I_T$$

である。ただし，σ_{ij} は Σ_u の (i, j) 成分である。したがって，(11.3) を回帰モデルと見なすとき，β の推定のためには一般化最小 2 乗法 (7.1 節) を使えばよいことがわかる。すなわち，

$$(\underline{y} - \underline{X}\beta)'(\Sigma_u \otimes I_T)^{-1}(\underline{y} - \underline{X}\beta) \tag{11.4}$$

を最小にする β を求め，これを $\hat{\beta}$ と書こう。$\hat{\beta}$ は，GLS 推定量の公式 (7.4) より

$$\hat{\beta} = \left\{\underline{X}'(\Sigma_u \otimes I_T)^{-1}\underline{X}\right\}^{-1} \underline{X}'(\Sigma_u \otimes I_T)^{-1}\underline{y}$$

で与えられる。右辺に $\underline{X}$，$\underline{y}$ の定義を代入すれば

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= \left\{(I_n \otimes X')(\Sigma_u^{-1} \otimes I_T)(I_n \otimes X)\right\}^{-1} (I_n \otimes X')(\Sigma_u^{-1} \otimes I_T)\mathrm{vec}(Y)\\ &= \left\{\Sigma_u \otimes (X'X)^{-1}\right\}(\Sigma_u^{-1} \otimes X')\mathrm{vec}(Y)\\ &= \left\{I_n \otimes (X'X)^{-1}X'\right\}\mathrm{vec}(Y).\end{aligned}$$

ここで，補題 11.1 (v), (vii) を使った。さらに補題 11.2 (iii) を使うと[4]

$$\hat{\beta} = \mathrm{vec}\left\{(X'X)^{-1}X'Y\right\}$$

となり，$\beta = \mathrm{vec}(B)$ であるから, B の推定量として

$$\hat{B} = (X'X)^{-1}X'Y$$

が得られる。

ここで注意すべきことは，(11.4) において Σ_u を明示的に考慮したにも関わらず，$\hat{B}$ が Σ_u に依存しないことである。実際，$\hat{\beta} = \mathrm{vec}(\hat{B})$ は，

$$(\underline{y} - \underline{X}\beta)'(\underline{y} - \underline{X}\beta)$$

を最小にする β に一致することが簡単にわかる (宿題)。したがって，$\hat{B}$ は，多変量回帰モデル (11.1) の GLS 推定量であり，かつ OLS 推定量である[5]。$\hat{B}$ を**多変量最小 2 乗** (MLS; multivariate least squares) **推定量**と呼ぶ。

さらに，MLS 推定量 $\hat{B}$ は，(11.1) を (システムとして取り扱わずに) 各式ごとに β_j を最小 2 乗推定したときの OLS 推定量 $\hat{\beta}_j$ $(j = 1, \cdots, n)$ を並べたものに等しい。このことは以下のようにして簡単にわかる。$y_{(j)} \equiv (y_{j1}, \cdots, y_{jT})'$ $(j = 1, \cdots, n)$ とすると，$Y = (y_{(1)}, \cdots, y_{(n)})$ だから，

$$\hat{B} = (X'X)^{-1}X'(y_{(1)}, \cdots, y_{(n)}) = \left((X'X)^{-1}X'y_{(1)}, \cdots, (X'X)^{-1}X'y_{(n)}\right)$$

[4] $A = (X'X)^{-1}X'$, $B = Y$, $C = I_n$ とおいて適用する。
[5] ただし，パラメータに関する制約が存在しそれを考慮する場合には，この結果 (GLS = OLS) は成り立たない。