とくに，事前制約 (11.37) が分離可能であるとき, (11.39) は，(11.41)–(11.42) より，

$$\begin{pmatrix} \eta_{(1)} \\ \eta_{(2)} \\ \vdots \\ \eta_{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Z_{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Z_{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{(1)} \\ u_{(2)} \\ \vdots \\ u_{(n)} \end{pmatrix}$$

であるから，$\hat{a}_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ を (10.39) における $a_i$ の 2SLS 推定量とすると，(11.45) の $\hat{a}$ は $(\hat{a}_1', \cdots, \hat{a}_n')'$ に等しい (宿題：これを示せ)。この場合，(11.46) の $\hat{u}_{(i)}$ $(i = 1, \cdots, n)$ は，各式の 2SLS 残差に等しい。よって，$\hat{\sigma}_{ij}$ (したがって，$\hat{\Sigma}_u$) は個別方程式の 2SLS 推定の残差から計算できる。(宿題：このとき，$\hat{\sigma}_{ij}$ が $\sigma_{ij}$ の一致推定量であることを示せ。)

(11.44) に $\Sigma_u$ の一致推定量を代入したもの，すなわち，

$$\min_a \ (\underline{\eta} - \underline{Z}a)'(\hat{\Sigma}_u^{-1} \otimes P_X)(\underline{\eta} - \underline{Z}a) \tag{11.47}$$

の解を $\tilde{a}$ と書くと，$\tilde{a}$ は

$$\tilde{a} \equiv \left\{\underline{Z}'(\hat{\Sigma}_u^{-1} \otimes P_X)\underline{Z}\right\}^{-1} \underline{Z}'(\hat{\Sigma}_u^{-1} \otimes P_X)\underline{\eta} \tag{11.48}$$

で与えられる。$\tilde{a}$ を $a$ の **3 段階最小 2 乗推定量** (three-stage least squares (3SLS) estimator) という。また，この推定方法を **3 段階最小 2 乗法**という[18]。(11.36) の $\alpha$ の 3 段階最小 2 乗推定量は，もちろん，$\tilde{\alpha} \equiv S\tilde{a} + p$ で与えられる。

### 3SLS 推定量の漸近特性

3SLS 推定量の一致性と漸近正規性を示すために，以下の補題が必要である。

**補題 11.4** rank $[\{I_n \otimes (\Pi, I_k)\}S] = (n + k)n - r$ が成り立つための必要十分条件は

$$\mathrm{rank}\left[\begin{pmatrix} I_n \otimes (\Pi, I_k) \\ R \end{pmatrix}\right] = n(n + k)$$

である。

＜証明＞ 補題 10.6 とまったく同様。 □

次の定理は，3SLS 推定量の一致性を与える。

**定理 11.3** 連立方程式モデルの仮定 *(i)*, *(ii)′* および *(iii)* が満たされ，事前制約は *(11.37),* すなわち *(11.38)* で与えられるものとする。連立方程式モデル *(11.19)* が識別可能ならば，*(11.39)* において $\tilde{a} \xrightarrow{p} a \ (T \to \infty)$, すなわち，*3SLS* 推定量 $\tilde{a}$ は一致推定量である。さらに，

$$\tilde{\alpha} \equiv S\tilde{a} + q \xrightarrow{p} \alpha \qquad (T \to \infty),$$

すなわち，*3SLS* 推定量 $\tilde{\alpha}$ は一致推定量である。

＜証明＞ (11.39) と (11.48) より

$$\tilde{a} - a = \left\{\underline{Z}'(\hat{\Sigma}_u^{-1} \otimes P_X)\underline{Z}\right\}^{-1} \underline{Z}'(\hat{\Sigma}_u^{-1} \otimes P_X)\underline{u}.$$

[18] 前述のように，制約が分離可能な場合，$\Sigma_u$ の推定のためにまず 2 段階最小 2 乗法が行われる。そのとき，(11.48) の計算は 3 段階目になる。

 