12.1.1 定常性の定義と自己相関関数

すべての t に対して

$$Ey_t = \mu \tag{12.1}$$

$$E(y_t - \mu)(y_{t-s} - \mu) = \gamma(s), \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{12.2}$$

であるとき，すなわち，確率過程の平均，分散および共分散 (相関) が時刻 t に依存しないとき，確率過程 $\{y_t\}$ は **(弱) 定常** [(weakly) stationary] であるという。$\gamma(s)$ を (s の関数と見なして) **自己共分散関数** (autocovariance function) という。ただし，$\gamma(s) = \gamma(-s)$ であるから[1]，実質的には $s = 0, 1, \ldots$ のみを考えればよい。また，**自己相関関数** (autocorrelation function) は

$$\rho(s) = \frac{\gamma(s)}{\gamma(0)} \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{12.3}$$

によって定義される (定義により，$\rho(0) = 1$ であることに注意)。$\gamma(s)$ と $\rho(s)$ は同じ形状をしており，確率過程の性質について同一の情報を提供しているが，$\rho(s)$ は基準化された量であるので，通常 $\rho(s)$ のほうがよく用いられる。

定常性のもとでは，たとえば，μ と $\gamma(s)$ は次のような統計量によって (単一の時系列データから) 推定することができる[2]。

$$\hat{\mu} = \bar{y} = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} y_t, \quad \hat{\gamma}(s) = T^{-1} \sum_{t=s+1}^{T} (y_t - \bar{y})(y_{t-s} - \bar{y})$$

さて，定常性の条件を満たす最も簡単な確率過程は，平均 0，分散 σ^2 で時刻に関して無相関であるようなものである。$\{\varepsilon_t\}$ をこのような確率過程とすると，すべての t に対して

$$E\varepsilon_t = 0$$

$$E\varepsilon_t\varepsilon_{t-s} = \begin{cases} \sigma^2 & \text{if} \quad s = 0 \\ 0 & \text{if} \quad s \neq 0 \end{cases}$$

である。このような $\{\varepsilon_t\}$ を**ホワイト・ノイズ** (white noise) という。$\{\varepsilon_t\}$ がホワイト・ノイズであることを，この授業では，$\varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$ と書く。ときに，異時点間の無相関性よりも強い性質を仮定することが便利なこともある。たとえば，$\{\varepsilon_t\}$ が異時点間で独立で同一の分布に従うとき，$\varepsilon_t \sim \mathrm{iid}(0, \sigma^2)$ と書く。さらに，$\{\varepsilon_t\}$ が異時点間で独立で，同一の正規分布に従うことを仮定するときには，$\varepsilon_t \sim \mathrm{iid}N(0, \sigma^2)$ と書く。もちろん，上の 3 つのうち，最初が最も弱く，最後が最も強い条件である[3]。

12.1.2 線形過程

ホワイト・ノイズの (無限個の) 線形結合で表わされる確率過程

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad \varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2), \qquad \sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty \tag{12.4}$$

---

[1] 定義に遡って考えればすぐに示せる。

[2] 実は，$\hat{\mu}, \hat{\gamma}(s)$ が $\mu, \gamma(s)$ の一致推定量となるためには, さらにエルゴード性という性質が必要である。しかし，この授業ではそのような技術的問題には言及しない。(以下で我々が考察するモデルはエルゴード性を持つ。)

[3] 以下において前 2 つの条件のうちどちらかを仮定する場合には，ε_t が (平均と分散ばかりでなく) より高次のモーメントを持つことを同時に仮定することが必要になることもある。これは，8.1 節で学んだ大数の法則や中心極限定理 (を一般化したもの) の適用を可能にするためである。

