12.7.2　単位根検定

階差をとるべきかどうかは，$\{y_t\}$ や $\{\Delta y_t\}$ の標本自己相関関数をグラフ化してみることによって，ある程度判断できる。$\{y_t\}$ が単位根を持つとき，$\rho(s)$ は s が増加してもなかなか減衰しない。しかし，階差をとるべきか否かの厳密な統計的検定法も利用可能である。この項では，それらの検定法の中から，最もポピュラーで，かつ容易に実行できる検定法を学ぶ。

$\phi^*(L)$ の定義 (12.45) に $L = 0$ を代入すると

$$\phi(1) - \phi_0^* = 1$$

であるから，(12.46) は

$$\begin{aligned}
\phi(1)y_t + \phi^*(L)\Delta y_t &= \varepsilon_t \\
\phi(1)y_{t-1} + [\phi^*(L) + \phi(1)]\Delta y_t &= \varepsilon_t \\
\phi(1)y_{t-1} + (1 - \phi_1^* L - \cdots - \phi_{p-1}^* L^{p-1})\Delta y_t &= \varepsilon_t
\end{aligned}$$

と変形できる。さらに，移項により

$$\Delta y_t = -\phi(1)y_{t-1} + \phi_1^*\Delta y_{t-1} + \cdots + \phi_{p-1}^*\Delta y_{t-p+1} + \varepsilon_t \tag{12.49}$$

を得る。既に見たように，y_t が単位根を持つか否かは $\phi(1) = 0$ か否かに等しいから，単位根の検定は，(12.49) 式を推定して $H_0 : \phi(1) = 0$ を検定することによって行える。

(12.49) において，$\gamma \equiv -\phi(1)$ とおき，モデルを

$$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + \phi_1^*\Delta y_{t-1} + \cdots + \phi_{p-1}^*\Delta y_{t-p+1} + \varepsilon_t \tag{12.50}$$

と書くと，p 次の AR モデルにおける単位根の検定は，結局

$$H_0 : \gamma = 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \gamma < 0$$

を，(12.50) において検定することに帰着する。ただし，(12.50) の原型である AR(p) モデル (12.44) において，$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p = 0$ はたかだかひとつの単位根しか持たず，残りの (あるいは全部の) 根は単位円の外にあるものと仮定している。このことから，対立仮説 H_1 が導かれる。すなわち，単位根が存在しない場合は，$\phi(1) > 0$ ($\gamma < 0$) でなければならないことが示せる[25]。

(12.50) を OLS で推定したときの γ の推定量を $\hat{\gamma}$，$\hat{\gamma}$ の標準誤差を $\mathrm{SE}(\hat{\gamma})$ と書くと，H_0 vs. H_1 は t 統計量

$$\hat{\tau} = \frac{\hat{\gamma}}{\mathrm{SE}(\hat{\gamma})}$$

を使って検定できる。ただし，$\hat{\tau}$ は (定常モデルの場合のように) 漸近的に $N(0,1)$ には従わない。したがって，臨界点は $N(0,1)$ の表から求めてはならない。正しい棄却域は，たとえば，Fuller, 1976, *Introduction*

ここで，$u_t \equiv \psi^*(L)\varepsilon_t$ と定義した。両辺を 1 から t まで足し合わせると

$$y_t = \psi(1)\sum_{s=1}^{t}\varepsilon_s + u_t + (y_0 - u_0)$$

と書くことができる。第 1 項の $\sum_{s=1}^{t}\varepsilon_s$ はランダム・ウォークであり定常ではない。したがって，$\psi(1) \neq 0$ ならば，y_t は非定常であり，もし $u_t = \psi^*(L)\varepsilon_t$ が定常であれば，y_t は和分過程である。他方，$\psi(1) = 0$ のとき，[u_t が定常ならば] y_t は定常である。すなわち，y_t は確率的トレンド $\psi(1)\sum_{s=1}^{t}\varepsilon_s$ と定常部分 u_t (および初期値 $y_0 - u_0$) に分解できる。

このように，Δy_t の MA(∞) 表現においては，MA 係数の和 $\psi(1)$ が 0 か否かが (u_t, すなわち $\psi^*(L)$ に関する適当な仮定のもとで) y_t が和分過程か否かを決定することになる。

[25] もし $\phi(1) < 0$ であるとすれば，関数 $w = \phi(z)$ が連続であることと $\phi(0) = 1$ であることから，少なくともひとつは絶対値が 1 より小さい根が存在してしまう。zw-平面に $w = \phi(z)$ のグラフを描いてみよ。

