13.4 インパルス応答関数と予測誤差分散分解

13.4.1 インパルス応答分析 (Impulse Response Analysis)

VAR(p) モデルの VMA(∞) 表現を

$$y_t - \mu = \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i u_{t-i} \tag{13.16}$$

と書いておく。ある時点 $t-1$ まで，$y_{t-1} = y_{t-2} = \cdots = \mu$ であったとしよう。このことは，

$$\begin{aligned} u_s &= y_s - \phi_0 - \Phi_1 y_{s-1} - \cdots - \Phi_p y_{s-p} \\ &= (y_s - \mu) - \Phi_1(y_{s-1} - \mu) - \cdots - \Phi_p(y_{s-p} - \mu) \end{aligned}$$

[(13.6) 参照] より，$u_{t-1} = u_{t-2} = \cdots = 0$ であったことを意味する。

時点 t において第 k **ショック** (**イノベーション**: innovation) u_{kt} のみが 1 で，他のショック u_{jt} ($j \neq k$) は 0 に等しく，$s = t+1$ 時点以降のショック u_s はすべて 0 であったとすると，$y_s - \mu$ の値は

$$\begin{aligned} y_t - \mu &= \Psi_0 e_k + \Psi_1 \cdot 0 + \cdots &&= e_k \\ y_{t+1} - \mu &= \Psi_0 \cdot 0 + \Psi_1 e_k + \Psi_2 \cdot 0 + \cdots &&= \Psi_1 e_k \\ y_{t+2} - \mu &= \Psi_0 \cdot 0 + \Psi_1 \cdot 0 + \Psi_2 e_k + \cdots &&= \Psi_2 e_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

となる。ここで，$e_k = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)'$ は，第 k 成分が 1 である n 次元単位ベクトルである。したがって，y_t の第 j 成分を y_{jt}，μ の第 j 成分を μ_j と書けば，

$$\begin{aligned} y_{j,t+1} - \mu_j &= \psi_{jk,1} \\ y_{j,t+2} - \mu_j &= \psi_{jk,2} \\ &\vdots \\ y_{j,t+h} - \mu_j &= \psi_{jk,h} \quad (h = 1, 2, \ldots) \end{aligned}$$

である [ここで，$\psi_{jk,h}$ は Ψ_h の (j,k) 成分を表す]。すなわち，[$y_s = \mu$ $(s \leq t-1)$ としたとき] 時点 t における第 k ショック 1 単位に対する，その後の第 j 変数の反応 (平均 μ_j からの乖離) は，VMA(∞) の係数

$$\psi_{jk,1}, \psi_{jk,2}, \psi_{jk,3}, \ldots$$

で表される。このことを,「第 k 変数への**インパルス**に対する，第 j 変数の**応答関数**は (h の関数として) $\psi_{jk,h}$ である」と表現する。

$y_t = (z_t', x_t')'$ のとき，x_t から z_t へのグレンジャー因果関係がないときには，VMA 表現において $\Psi_{12,i} = O$ ($i = 1, 2, \ldots$) であることを先に示した。したがって，そのときは，x_t に属する成分に対するインパルスによる，z_t に属する成分の応答 (関数) は 0 である。ただし，一般に，y_{kt} へのインパルスに対する y_{jt} の応答 $\psi_{jk,i}$ がすべての i について 0 であることは，y_{kt} から y_{jt} へのグレンジャー因果関係がないということを意味しない。

13.4.2 直交化されたインパルスに対する応答

前項では，($s \leq t-1$, $s \geq t+1$ において $u_s = 0$ で) $u_t = e_k \equiv (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)'$ という状況を考えた。これは，他の変数に対するショックとはまったく無関係 (独立) に第 k 変数にのみ (1 単位の) ショッ

