グレンジャー因果性のワルド検定

VAR(p) モデル

$$y_t = \phi_0 + \Phi_1 y_{t-1} + \cdots + \Phi_p y_{t-p} + u_t$$

において，y_t を $y_t = (y'_{1t}, y'_{2t}, y'_{3t})'$ と分割する。y_{1t}，y_{2t}，y_{3t} は，それぞれ，n_1，n_2，n_3 次元ベクトルである。また，これに対応させて，Φ_i $(i = 1, \ldots, p)$ を

$$\begin{pmatrix} \Phi_{11,i} & \Phi_{12,i} & \Phi_{13,i} \\ \Phi_{21,i} & \Phi_{22,i} & \Phi_{23,i} \\ \Phi_{31,i} & \Phi_{32,i} & \Phi_{33,i} \end{pmatrix}$$

と分割する。ここで，たとえば，$\Phi_{13,i}$ $(i = 1, \ldots, p)$ は $n_1 \times n_3$ 行列である。

13.3.1 項の命題 3 より，y_{3t} から y_{1t} へのグレンジャーの因果関係がないことは，次のように表現できる。

$$\mathrm{H}_0: \ \Phi_{13,1} = \Phi_{13,2} = \cdots = \Phi_{13,p} = O$$

もちろん，H_1 は「ある i について $\Phi_{13,i} \neq O$」である。このパラメータ制約は，(13.32) 式の形に表すことができる。すなわち，$n \times n_1$ 行列 S_1，$n \times n_3$ 行列 S_3，$(np+1) \times np$ 行列 S_p および $np \times n_3 p$ 行列 $\underline{S}_3$ を

$$S_1 = \begin{pmatrix} I_{n_1} \\ O \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} O \\ I_{n_3} \end{pmatrix}, \quad S_p = \begin{pmatrix} 0' \\ I_{np} \end{pmatrix}, \quad \underline{S}_3 = I_p \otimes S_3$$

と定義すると，H_0 は

$$S'_1 B S_p \underline{S}_3 = 0$$

と表現できる。ただし，$B = (\phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_p)$ である。

両辺の vec をとると，補題 11.2 (iii) より

$$\begin{aligned} (\underline{S}'_3 S'_p \otimes S'_1)\mathrm{vec}(B) &= 0 \\ (\underline{S}'_3 S'_p \otimes S'_1)\beta &= 0 \end{aligned}$$

となる。したがって，最後の式より

$$R = \underline{S}'_3 S'_p \otimes S'_1, \quad c = 0 \tag{13.34}$$

とおけばよいことがわかる。たとえば，$p = 2$，$n_1 = 1$，$n_2 = 0$，$n_3 = 2$ (したがって，$n = 3$) のとき，

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

である。

(13.34) を (13.33) に代入すると

$$\begin{aligned} &(\underline{S}'_3 S'_p \otimes S'_1)\left\{(Z'Z)^{-1} \otimes \tilde{\Sigma}_u\right\}(S_p \underline{S}_3 \otimes S_1) = \underline{S}'_3 S'_p (Z'Z)^{-1} S_p \underline{S}_3 \otimes S'_1 \tilde{\Sigma}_u S_1, \\ &(\underline{S}'_3 S'_p \otimes S'_1)\tilde{\beta} = (\underline{S}'_3 \otimes S'_1)(S'_p \otimes I_n)\mathrm{vec}(\tilde{B}) = (\underline{S}_3 \otimes S'_1)\mathrm{vec}(\tilde{B} S_p) \end{aligned}$$

だから

$$W = \left\{(\underline{S}'_3 \otimes S'_1)\tilde{\alpha}\right\}' \left[\underline{S}'_3 (X' Q_1 X)^{-1} \underline{S}_3 \otimes S'_1 \tilde{\Sigma}_u S_1\right]^{-1} (\underline{S}'_3 \otimes S'_1)\tilde{\alpha}$$

