時的" で，外界からの "ショック" がなければ均衡関係 $b'y_t$=0 が回復される。このように， 経済学的解釈が容易であるために，共和分時系列の発見およびその分析は，時系列データを使った最近の実証分析における，最もポピュラーなトピックのひとつとなった。

上記のようなベクトル b として，線形独立な複数の b が存在しても構わない。そのような (線形独立な) ベクトルが $r\ (\leq n)$ 個存在するとして，それらを $B = (b_1, \ldots, b_r)$ とまとめて書けば，B は $n \times r$ 非確率行列である。このとき，$y_t \sim CI(d, g)$ とは，$y_t \sim I(d)$ かつ $B'y_t = (b_1'y_t, \ldots, b_r'y_t)' \sim I(d-g)$ であることである。r を**共和分階数** (cointegrating rank) と呼ぶ。上述の例と同様に，**共和分行列** B は一意ではない。F を任意の $r \times r$ 正則行列とすると，B が共和分行列ならば，BF もまた共和分行列である。

13.8.2 誤差修正モデル (Error Correction Model; ECM)

以下では，前節までと同様に，y_t が多変量自己回帰 (VAR) モデルによって生成されているものとして話を進める。VAR モデルは，理論的には，ラグ次数 p を十分に (無限に) 大きくとることによって，線形過程と呼ばれる一般的な確率過程 [(12.4) の多変量版] のクラスに属する時系列をいくらでもうまく近似することができる。より具体的に，n 次元確率過程 y_t は， VAR モデル

$$y_t = \Phi_1 y_{t-1} + \cdots + \Phi_p y_{t-p} + u_t, \quad u_t \sim \mathrm{iid}(0, \Sigma_u) \tag{13.44}$$

によって生成されているものとする。ここで，$\Phi_i\ (i = 1, \ldots, p)$ は $n \times n$ パラメータ行列，u_t は異時点間で独立で，同一の分布に従う撹乱項 (innovation) である。

経済データでは，概ね d は 0 か 1 とみなされることが多いので，以下では，$y_t \sim I(0)$ であるか，$y_t \sim I(1)$ であるかにのみ注目しよう。y_t は，パラメータ行列 Φ_i のとる値によって，定常 [$I(0)$] であったり非定常 [$I(1)$] であったりする。定常性の条件が満たされているときには，既に学んだように， (13.44) 式における統計的推測には何の問題も生じない。たとえば，最小 2 乗推定や通常の漸近的仮説検定の方法が適用できる[22]。しかしながら， (13.44) が定常でない場合には，通常の統計的推測の理論は一般に (特殊な場合を除いて) 適用できない。

(13.44) 式を

$$\Delta y_t = \Pi y_{t-1} + \Phi_1^* \Delta y_{t-1} + \cdots + \Phi_{p-1}^* \Delta y_{t-p+1} + u_t, \quad u_t \sim \mathrm{iid}(0, \Sigma_u) \tag{13.45}$$

と書き換えることができる。ここで，$\Pi = -\Phi(1) = \Phi_1 + \cdots + \Phi_p - I_n$，$\Phi_i^* = -\sum_{h=i+1}^{p} \Phi_h\ (i = 1, \ldots, p-1)$，$\Delta y_s = y_s - y_{s-1}$ である。多変量自己回帰モデル (13.44) の特性方程式において，

$$\Phi(z) = I_n - \Phi_1 z - \cdots - \Phi_p z^p = 0 \ \text{ならば}\ |z| > 1 \ \text{または}\ z = 1 \tag{13.46}$$

と仮定して，$z = 1$ なる根 [すなわち単位根 (unit root)] の存在も許すとすると[23]，以下の結果 1–3 が知られている。$\mathrm{rank}(\Pi) = r\ (r = 0, 1, \ldots, n)$ とする。もし $0 < r < n$ ならば，$\Pi = AB'$ と書ける。ここで，A および B は，階数 r の $n \times r$ 行列である[24]。$A_\perp$，$B_\perp$ をそれぞれ $A'A_\perp = O$，$B'B_\perp = O$ である $n \times (n-r)$ 行列と定義する。また，$\Phi^*(1) = I_n - \Phi_1^* - \cdots - \Phi_{p-1}^*$ とおく。このとき，

1. $r = n$ ならば，$y_t \sim I(0)$
2. (a) $0 < r < n$ かつ (b) $\mathrm{rank}[A_\perp' \Phi^*(1) B_\perp] = n - r$ ならば，$y_t \sim I(1)$ かつ $y_t \sim CI(1, 1)$ で，$B'y_t \sim I(0)$
3. (a) $r = 0$ (すなわち，$\Pi = O$) かつ (b) $\mathrm{rank}[\Phi^*(1)] = n$ ならば，$y_t \sim I(1)$ かつ共和分は存在しない

---

[22] 以下,「通常の」というときには,「定常時系列モデルの場合と同様の検定統計量や分布表を用いることができる」という意味である。

[23] ここで，時系列が発散するケース，i.e.，$|z| < 1$ は考慮の対象外としている。

[24] ここでの記号 A，B は，もちろん 13.5 節とは異なる意味で使われている。

