となる。ただし，$u_t \equiv N_t^{-1}\sum_{n=1}^{N_t} u_{nt}$ と定義した。データの制約のもとでは，(7.18) ではなく (7.19) が我々の推定しようとする回帰式である。

このとき，誤差項に関する**仮定** 2–3 のうち，$Eu_t = 0$ および $Eu_tu_s = 0\ (t \neq s)$ は満たされるが，$Eu_t^2 = \sigma^2$ は満たされない。実際，

$$Eu_t^2 = \frac{1}{N_t^2}E\left(\sum_{n=1}^{N_t} u_{nt}\right)^2 = \frac{1}{N_t^2}N_t\sigma^2 = N_t^{-1}\sigma^2$$

であり，u_t に分散の不均一性が存在する。(7.19) を推定するためには，(7.17) 式において $\omega_{tt} = N_t^{-1}$ として WLS を適用すればよい。

7.1.5 系列相関と GLS

6.6 節 (☞442 ページ) で対立仮説として登場した，誤差項の系列相関のモデル

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \qquad |\rho| < 1 \tag{7.20}$$

を考えよう。ここで ε_t は $E\varepsilon_t = 0, E\varepsilon_t^2 = \sigma_\varepsilon^2, E\varepsilon_t\varepsilon_s = 0\ (t \neq s)$ を満たすものとする[6]。すなわち，回帰モデル

$$y_t = x_{\cdot t}'\beta + u_t \qquad t = 1, \cdots, T \tag{7.21}$$

の誤差項 u_t が **1 次の自己回帰モデル**に従うとする。このとき，β を GLS によって推定することを考えよう。

6.6.1 項 (☞442 ページ) で見たように，u_t が (7.20) 式によって生みだされているとすると

$$\begin{aligned} Eu_t^2 &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2} \equiv \sigma^2 \\ Eu_tu_{t-1} &= \frac{\rho\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2} = \rho\sigma^2 \\ &\ \vdots \\ Eu_tu_{t-s} &= \frac{\rho^s\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2} = \rho^s\sigma^2 \end{aligned}$$

である。ここから類推されるように，u_t と u_r の共分散は実は t, r そのものではなく，2 時点の差 $|t-r|$ にのみ依存する。すなわち，一般に

$$Eu_tu_r = \rho^{|t-r|}\sigma^2 \tag{7.22}$$

である。(7.22) 式を使うと $u = (u_1, \cdots, u_T)'$ の分散共分散行列は

$$Euu' \equiv \sigma^2\Omega = \sigma^2\begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{T-1} \\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho^{T-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \cdots & \rho^{T-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{T-1} & \rho^{T-2} & \rho^{T-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{7.23}$$

と書ける。

いま，前項までの議論のように，Ω が既知，すなわち ρ **が既知**であると仮定すると，回帰モデル

$$y = X\beta + u \tag{7.24}$$

[6] ε_t の正規性は必ずしも必要ではない。

