

補題 8.11 $\{X_T\}$ を n 次元確率ベクトル列, $X_t \sim \text{iid}(\mu, \Sigma)$, $\bar{X}_T = T^{-1} \sum_{t=1}^T X_t$ とする。このとき,

$$\sqrt{T}(\bar{X}_T - \mu) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T (X_t - \mu) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma) \quad (T \rightarrow \infty)$$

<証明> 宿題 □

補題 8.7 の多変量への拡張も同様に可能である。

例 確率変数列 $\{U_t\}$ は $\text{iid}(0, \sigma^2)$ で, $\{a_{tT}\}_{t=1}^T$ は n 次元ベクトル三角配列とする。このとき, $T^{-1} \sum_{t=1}^T a_{tT} a'_{tT} \rightarrow A$ ($T \rightarrow \infty$) ならば,

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T a_{tT} U_t \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2 A) \quad (T \rightarrow \infty).$$

8.1.7 いくつかの有用な結果

確率収束や分布収束に関して, 次の性質が成り立つ。

補題 8.12 $\{W_T\}, \{Z_T\}$ を確率変数列, a, b を定数とする。 $T \rightarrow \infty$ のとき, $W_T \xrightarrow{p} a, Z_T \xrightarrow{p} b$ ならば

- (a) $W_T + Z_T \xrightarrow{p} a + b$
- (b) $W_T Z_T \xrightarrow{p} ab$
- (c) $W_T / Z_T \xrightarrow{p} a/b$ ($b \neq 0$)

<証明> (a) のみ示す。

$$\begin{aligned} \Pr\{|W_T + Z_T - (a + b)| > \varepsilon\} &\leq \Pr\{|W_T - a| + |Z_T - b| > \varepsilon\} \\ &\leq \Pr\left\{|W_T - a| > \frac{\varepsilon}{2} \text{ or } |Z_T - b| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \\ &\leq \Pr\left\{|W_T - a| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} + \Pr\left\{|Z_T - b| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \\ &\rightarrow 0 \quad (T \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

□

補題 8.13 (Slutsky の定理) $X_T \xrightarrow{p} a$ ($T \rightarrow \infty$) のとき, 関数 f が a において連続ならば, $f(X_T) \xrightarrow{p} f(a)$

<証明> f の連続性により, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$|X_T - a| \leq \delta \text{ ならば } |f(X_T) - f(a)| \leq \varepsilon$$

を満たす $\delta > 0$ が存在する。したがって,

$$\Pr\{|X_T - a| \leq \delta\} \leq \Pr\{|f(X_T) - f(a)| \leq \varepsilon\} \leq 1.$$

$T \rightarrow \infty$ のとき, 左辺は仮定により 1 に収束するから, $\Pr\{|f(X_T) - f(a)| \leq \varepsilon\} \rightarrow 1$, すなわち $f(X_T) \xrightarrow{p} f(a)$ ($T \rightarrow \infty$). □