補題 8.11 $\{X_T\}$ を n 次元確率ベクトル列，$X_t \sim \mathrm{iid}(\mu, \Sigma)$, $\bar{X}_T = T^{-1}\sum_{t=1}^{T} X_t$ とする。このとき，

$$\sqrt{T}(\bar{X}_T - \mu) = \frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}(X_t - \mu) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma) \quad (T \to \infty)$$

＜証明＞ 宿題 □

補題 8.7 の多変量への拡張も同様に可能である。

例 確率変数列 $\{U_t\}$ は $\mathrm{iid}(0, \sigma^2)$ で，$\{\{a_{tT}\}_{t=1}^{T}\}_{T=1}^{\infty}$ は n 次元ベクトル三角配列とする。このとき，$T^{-1}\sum_{t=1}^{T} a_{tT}a'_{tT} \to A$ $(T \to \infty)$ ならば，

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T} a_{tT}U_t \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2 A) \quad (T \to \infty).$$

8.1.7 いくつかの有用な結果

確率収束や分布収束に関して，次の性質が成り立つ。

補題 8.12 $\{W_T\}, \{Z_T\}$ を確率変数列，a, b を定数とする。$T \to \infty$ のとき，$W_T \xrightarrow{p} a$, $Z_T \xrightarrow{p} b$ ならば

(a) $W_T + Z_T \xrightarrow{p} a + b$

(b) $W_T Z_T \xrightarrow{p} ab$

(c) $W_T / Z_T \xrightarrow{p} a/b \quad (b \neq 0)$

＜証明＞ (a) のみ示す。

$$\begin{aligned}
\Pr\{|W_T + Z_T - (a+b)| > \varepsilon\} &\leq \Pr\{|W_T - a| + |Z_T - b| > \varepsilon\} \\
&\leq \Pr\left\{|W_T - a| > \frac{\varepsilon}{2} \text{ or } |Z_T - b| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \\
&\leq \Pr\left\{|W_T - a| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} + \Pr\left\{|Z_T - b| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \\
&\to 0 \quad (T \to \infty)
\end{aligned}$$

□

補題 8.13 (Slutsky の定理) $X_T \xrightarrow{p} a$ $(T \to \infty)$ のとき，関数 f が a において連続ならば，$f(X_T) \xrightarrow{p} f(a)$

＜証明＞ f の連続性により，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$|X_T - a| \leq \delta \ \text{ならば}\ |f(X_T) - f(a)| \leq \varepsilon$$

を満たす $\delta > 0$ が存在する。したがって，

$$\Pr\{|X_T - a| \leq \delta\} \leq \Pr\{|f(X_T) - f(a)| \leq \varepsilon\} \leq 1.$$

$T \to \infty$ のとき，左辺は仮定により 1 に収束するから，$\Pr\{|f(X_T) - f(a)| \leq \varepsilon\} \to 1$, すなわち $f(X_T) \xrightarrow{p} f(a)$ $(T \to \infty)$. □

