仮定 3^+ は**仮定** 3 [誤差項の無相関性] よりも強い。前者が成り立てば，後者は自動的に成り立つ。**仮定** 2–3^+ を言い換えれば，$\{u_t\} \sim \mathrm{iid}(0, \sigma_u^2)$ である。

条件を追加したのは簡単化のためであり，前節で紹介した (初歩的な) WLLN や CLT を用いて以下の結果が示せるようにするためである。前節で紹介したものよりも一般的な WLLN や CLT を用いれば，より緩やかな仮定のもとでこの項の (したがって次項の) 結果を証明することもできる。

さらに，**仮定** 5 (☞477 ページ) に替えて次の仮定を置く。

仮定 5^+. $T \to \infty$ のとき，$T^{-1}X'X$ はある正定符号行列 M に収束する

この仮定は**仮定** 5 よりも強い。すなわち，**仮定** 5^+ が成り立つならば**仮定** 5 も成り立つ。このことを示すのは容易である。(宿題)

仮定 6 [誤差項の正規性] は仮定しない。(もちろん，誤差項が正規分布に従う場合にも，以下の結果は成り立つ。)

以上の仮定のもとで，$T \to \infty$ のときの，OLS 推定量 $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$ の「構成部品」の漸近的振る舞いを考えよう。まず，上記の**仮定** 5^+ は

$$T^{-1}X'X = T^{-1}\sum_{t=1}^{T} x_t x_t' \to M > 0 \qquad (T \to \infty) \tag{8.8}$$

ということである。また，**仮定** 2，3^+，4^+ より，すべての t について $Ex_tu_t = 0$, $Ex_{jt}^2u_t^2 = \sigma_u^2 x_{jt}^2 < \infty$ $(j = 1, \cdots, k)$, x_tu_t と x_su_s $(t \neq s)$ は統計的に独立だから，補題 8.5 (の多次元への拡張) より

$$T^{-1}X'u = T^{-1}\sum_{t=1}^{T} x_t u_t \xrightarrow{p} 0_k \qquad (T \to \infty) \tag{8.9}$$

である。さらに，**仮定** 1，2，3^+，4^+ および 5^+ により，補題 8.7 (の多変量への拡張) を用いると

$$T^{-1/2}X'u = T^{-1/2}\sum_{t=1}^{T} x_t u_t \xrightarrow{d} z \sim N(0_k, \sigma_u^2 M) \qquad (T \to \infty) \tag{8.10}$$

であることがわかる。$T^{-1}X'u = T^{-1/2}(T^{-1/2}\sum_{t=1}^{T} x_tu_t)$ だから，補題 8.14(b) より，(8.10) が成り立つならば, (8.9) も成り立つ。しかし，逆 [(8.9) ⇒ (8.10)] は必ずしも成り立たない。

(8.8), (8.9), 補題 8.12 (の確率ベクトルへの拡張), および補題 8.13 より，**仮定** 1–2，3^+–5^+ のもとで

$$\begin{aligned}
\operatorname*{plim}_{T\to\infty}\hat{\beta} &= \operatorname*{plim}_{T\to\infty}\left(\beta + (T^{-1}X'X)^{-1}T^{-1}X'u\right) \\
&= \beta + \lim_{T\to\infty}(T^{-1}X'X)^{-1}\operatorname*{plim}_{T\to\infty}T^{-1}X'u \\
&= \beta + \left(\lim_{T\to\infty}T^{-1}X'X\right)^{-1}\operatorname*{plim}_{T\to\infty}T^{-1}X'u \\
&= \beta + M^{-1}\cdot 0_k = \beta
\end{aligned} \tag{8.11}$$

であることがわかる。ここで，逆行列の各成分はもとの行列の成分の連続関数であること，および非確率変数の確率極限 (plim) は通常の極限 (lim) に一致することを使った。したがって，$\hat{\beta}$ は**一致推定量**である。

次に，(8.8), (8.10), 補題 8.13 および補題 8.14(b) (の多次元への拡張) により，

$$\begin{aligned}
\sqrt{T}(\hat{\beta} - \beta) &= (T^{-1}X'X)^{-1}T^{-1/2}X'u \\
&\xrightarrow{d} M^{-1}z \equiv w \sim N(0_k, \sigma_u^2 M^{-1})
\end{aligned} \tag{8.12}$$

である。すなわち，**仮定** 1，2，3^+，4^+ および 5^+ が満たされるならば，T が十分大きいとき，$\sqrt{T}(\hat{\beta} - \beta)$ は平均 0_k, 分散共分散行列 $\sigma_u^2(X'X/T)^{-1}$ の多変量正規分布で近似できる。言いかえれば，$\hat{\beta}$ の分布は平均

