

仮定 3<sup>+</sup> は仮定 3 [誤差項の無相関性] よりも強い。前者が成り立てば、後者は自動的に成り立つ。仮定 2-3<sup>+</sup> を言い換えれば、 $\{u_t\} \sim \text{iid}(0, \sigma_u^2)$  である。

条件を追加したのは簡単化のためであり、前節で紹介した (初歩的な) WLLN や CLT を用いて以下の結果が示せるようにするためである。前節で紹介したものよりも一般的な WLLN や CLT を用いれば、より緩やかな仮定のもとでこの項の (したがって次項の) 結果を証明することもできる。

さらに、仮定 5 (477 ページ) に替えて次の仮定を置く。

仮定 5<sup>+</sup>.  $T \rightarrow \infty$  のとき、 $T^{-1}X'X$  はある正定符号行列  $M$  に収束する

この仮定は仮定 5 よりも強い。すなわち、仮定 5<sup>+</sup> が成り立つならば仮定 5 も成り立つ。このことを示すのは容易である。(宿題)

仮定 6 [誤差項の正規性] は仮定しない。(もちろん、誤差項が正規分布に従う場合にも、以下の結果は成り立つ。)

以上の仮定のもとで、 $T \rightarrow \infty$  のときの、OLS 推定量  $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$  の「構成部品」の漸近的振る舞いを考えよう。まず、上記の仮定 5<sup>+</sup> は

$$T^{-1}X'X = T^{-1} \sum_{t=1}^T x_t x_t' \rightarrow M > 0 \quad (T \rightarrow \infty) \quad (8.8)$$

ということである。また、仮定 2, 3<sup>+</sup>, 4<sup>+</sup> より、すべての  $t$  について  $Ex_t u_t = 0$ ,  $Ex_{jt}^2 u_t^2 = \sigma_u^2 x_{jt}^2 < \infty$  ( $j = 1, \dots, k$ ),  $x_t u_t$  と  $x_s u_s$  ( $t \neq s$ ) は統計的に独立だから、補題 8.5 (の多次元への拡張) より

$$T^{-1}X'u = T^{-1} \sum_{t=1}^T x_t u_t \xrightarrow{p} 0_k \quad (T \rightarrow \infty) \quad (8.9)$$

である。さらに、仮定 1, 2, 3<sup>+</sup>, 4<sup>+</sup> および 5<sup>+</sup> により、補題 8.7 (の多変量への拡張) を用いると

$$T^{-1/2}X'u = T^{-1/2} \sum_{t=1}^T x_t u_t \xrightarrow{d} z \sim N(0_k, \sigma_u^2 M) \quad (T \rightarrow \infty) \quad (8.10)$$

であることがわかる。 $T^{-1}X'u = T^{-1/2}(T^{-1/2} \sum_{t=1}^T x_t u_t)$  だから、補題 8.14(b) より、(8.10) が成り立つならば、(8.9) も成り立つ。しかし、逆 [(8.9)  $\Rightarrow$  (8.10)] は必ずしも成り立たない。

(8.8), (8.9), 補題 8.12 (の確率ベクトルへの拡張), および補題 8.13 より、仮定 1-2, 3<sup>+</sup>-5<sup>+</sup> のもとで

$$\begin{aligned} \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \hat{\beta} &= \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \left( \beta + (T^{-1}X'X)^{-1}T^{-1}X'u \right) \\ &= \beta + \lim_{T \rightarrow \infty} (T^{-1}X'X)^{-1} \text{plim}_{T \rightarrow \infty} T^{-1}X'u \\ &= \beta + \left( \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1}X'X \right)^{-1} \text{plim}_{T \rightarrow \infty} T^{-1}X'u \\ &= \beta + M^{-1} \cdot 0_k = \beta \end{aligned} \quad (8.11)$$

であることがわかる。ここで、逆行列の各成分はもとの行列の成分の連続関数であること、および非確率変数の確率極限 (plim) は通常の極限 (lim) に一致することを使った。したがって、 $\hat{\beta}$  は一致推定量である。

次に、(8.8), (8.10), 補題 8.13 および補題 8.14(b) (の多次元への拡張) により、

$$\begin{aligned} \sqrt{T}(\hat{\beta} - \beta) &= (T^{-1}X'X)^{-1}T^{-1/2}X'u \\ &\xrightarrow{d} M^{-1}z \equiv w \sim N(0_k, \sigma_u^2 M^{-1}) \end{aligned} \quad (8.12)$$

である。すなわち、仮定 1, 2, 3<sup>+</sup>, 4<sup>+</sup> および 5<sup>+</sup> が満たされるならば、 $T$  が十分大きいとき、 $\sqrt{T}(\hat{\beta} - \beta)$  は平均  $0_k$ , 分散共分散行列  $\sigma_u^2(X'X/T)^{-1}$  の多変量正規分布で近似できる。言い換えれば、 $\hat{\beta}$  の分布は平均