操作変数の妥当性に関する検定

IV 推定量を定義する (9.5) の最小値

$$(y - X\tilde{\beta})' P_W (y - X\tilde{\beta}) = \tilde{u}' P_W \tilde{u} \tag{9.12}$$

の分布を利用して，操作変数の妥当性を検定することができる。具体的には，検定統計量は

$$G = \frac{\tilde{u}' P_W \tilde{u}}{\tilde{\sigma}_u^2}$$

で与えられる。ただし，$\tilde{\sigma}_u^2$ は (9.11) で定義された σ_u^2 の一致推定量である。

定理 9.5 $\ell > k$ のとき，操作変数法の適用が妥当である *(* すなわち，**仮定** *IV2–IV5* が満たされる *)* ならば，

$$G \xrightarrow{d} \chi^2_{\ell-k} \qquad (T \to \infty).$$

ここで，ℓ は w_t の次元，k は x_t の次元である。

＜証明＞　まず，$\tilde{\sigma}_u$ の一致性と補題 8.14 (の多変量版) から，与えられた条件のもとで

$$\frac{1}{\tilde{\sigma}_u} \left(\frac{W'W}{T} \right)^{-1/2} \frac{W'u}{\sqrt{T}} \xrightarrow{d} z \sim N(0, I_\ell) \qquad (T \to \infty) \tag{9.13}$$

であることが容易に示せる。

次に，残差は

$$\begin{aligned} \tilde{u} = y - X\tilde{\beta} &= y - X\beta + X(\beta - \tilde{\beta}) \\ &= u + X(\beta - \tilde{\beta}) \end{aligned}$$

であるから，

$$\frac{W'\tilde{u}}{\sqrt{T}} = \frac{W'u}{\sqrt{T}} + \frac{W'X}{T} \sqrt{T}(\beta - \tilde{\beta})$$

と書き直せる。$\sqrt{T}(\beta - \tilde{\beta})$ に

$$-\left(\frac{X' P_W X}{T} \right)^{-1} \frac{X' P_W u}{\sqrt{T}}$$

を代入すると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tilde{\sigma}_u} \left(\frac{W'W}{T} \right)^{-1/2} \frac{W'\tilde{u}}{\sqrt{T}} \\ = & \frac{1}{\tilde{\sigma}_u} \left(\frac{W'W}{T} \right)^{-1/2} \frac{W'u}{\sqrt{T}} \\ & \qquad - \frac{1}{\tilde{\sigma}_u} \left(\frac{W'W}{T} \right)^{-1/2} \frac{W'X}{T} \left(\frac{X' P_W X}{T} \right)^{-1} \frac{X'W}{T} \left(\frac{W'W}{T} \right)^{-1} \frac{W'u}{\sqrt{T}} \\ = & \left[I_\ell - \left(\frac{W'W}{T} \right)^{-1/2} \frac{W'X}{T} \left(\frac{X' P_W X}{T} \right)^{-1} \frac{X'W}{T} \left(\frac{W'W}{T} \right)^{-1/2} \right] \frac{1}{\tilde{\sigma}_u} \left(\frac{W'W}{T} \right)^{-1/2} \frac{W'u}{\sqrt{T}} \end{aligned}$$

ゆえに，補題 8.14 (の多次元への拡張) により，

$$\frac{1}{\tilde{\sigma}_u} \left(\frac{W'W}{T} \right)^{-1/2} \frac{W'\tilde{u}}{\sqrt{T}} \xrightarrow{d} \left[I_\ell - M_{ww}^{-1/2} M_{wx} \left(M_{xw} M_{ww}^{-1} M_{wx} \right)^{-1} M_{xw} M_{ww}^{-1/2} \right] z = Q_{M_{ww}^{-1/2} M_{wx}} z \qquad (T \to \infty)$$

