

で与えられる [6.8.1 項 (468 ページ) 参照]。この最大化問題を解いて得られる  $\theta$  の制約付き最尤推定量を  $\tilde{\theta}_*$  と書こう。  $\theta$  に関する制約を考慮しない場合の最尤推定量は、これまでと同様  $\tilde{\theta}$  で表す。

記号の簡略化のために  $L(\theta; z_1, \dots, z_T) \equiv L(\theta)$  と書くと、3 つの検定統計量は以下のように定義される。なお、最初の式の左辺の  $LR$  は (9.20) で定義された  $LR$  である。

(漸近的) 尤度比検定 (likelihood ratio test)

$$-2 \log LR = -2 \{ \log L(\tilde{\theta}_*) - \log L(\tilde{\theta}) \}$$

ワルド検定 (Wald test)

$$W = Th(\tilde{\theta})' \{ H(\tilde{\theta}) \tilde{I}_A(\tilde{\theta})^{-1} H(\tilde{\theta})' \}^{-1} h(\tilde{\theta}) \quad (9.29)$$

ラグランジュ乗数検定 (Lagrange multiplier test)

$$LM = \frac{1}{T} \left\{ \frac{\partial \log L}{\partial \theta}(\tilde{\theta}_*) \right\}' \tilde{I}_A(\tilde{\theta}_*)^{-1} \left\{ \frac{\partial \log L}{\partial \theta}(\tilde{\theta}_*) \right\}$$

ここで、 $\tilde{I}_A$  は  $\tilde{I}_A \xrightarrow{p} I_A(\theta_0)$  ( $T \rightarrow \infty$ ) となるような  $I_A(\theta_0)$  の推定量である。  $W$  においては  $\tilde{I}_A(\cdot)$  は  $\tilde{\theta}$  を使って、  $LM$  においては  $\tilde{I}_A(\cdot)$  は  $\tilde{\theta}_*$  を使って作られていることに注意しよう。すなわち、Wald (LM) 検定を行うためには、制約なし (制約付き) の最尤推定のみを行えばよい。これに対して、LR 検定を行うためには両方の推定を行う必要がある。

これらの検定統計量は、帰無仮説のもとで漸近的に  $\chi_m^2$  分布に従う。この結果を定理 9.7 に対応する形で述べておく。

定理 9.8  $\{Z_t\}_{t=1}^T$  は独立同一分布に従う確率ベクトル列で、定理 9.7 の仮定がすべて満たされるものとする。  $T \rightarrow \infty$  のとき、(9.27) の帰無仮説のもとで、

$$-2 \log LR, W, LM \xrightarrow{d} \chi_m^2.$$

<証明> 概略のみ示す。ワルド検定統計量は、定義により

$$W = \sqrt{T} h(\tilde{\theta})' \{ H(\tilde{\theta}) \tilde{I}_A(\tilde{\theta})^{-1} H(\tilde{\theta})' \}^{-1} \sqrt{T} h(\tilde{\theta}) \quad (9.30)$$

である。これに関しては、補題 8.17 を用いて、定理 9.4 の証明とまったく同じようにして証明できるので省略 (宿題)。

まず、ラグランジュ乗数検定を考えよう。  $\sqrt{T}h$  を  $\theta_0$  のまわりでテイラー展開して  $\tilde{\theta}_*$  で評価すると、  $h(\theta_0) = h(\tilde{\theta}_*) = 0$  だから

$$0 = \sqrt{T}h(\tilde{\theta}_*) = \sqrt{T}h(\theta_0) + H(\theta_0) \sqrt{T}(\tilde{\theta}_* - \theta_0) + o_p(1) = H(\theta_0) \sqrt{T}(\tilde{\theta}_* - \theta_0) + o_p(1). \quad (9.31)$$

$T^{-1/2} \partial \log L / \partial \theta$  を  $\tilde{\theta}$  のまわりでテイラー展開して  $\tilde{\theta}_*$  で評価すると

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\partial \log L}{\partial \theta}(\tilde{\theta}_*) = \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\partial \log L}{\partial \theta}(\tilde{\theta}) + \frac{1}{T} \frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta \partial \theta'}(\tilde{\theta}) \sqrt{T}(\tilde{\theta}_* - \tilde{\theta}) + o_p(1).$$

最大化の一階の条件:  $\partial \log L(\tilde{\theta}) / \partial \theta = 0$  を考慮し、両辺に  $(T^{-1} \partial^2 \log L(\tilde{\theta}) / \partial \theta \partial \theta')^{-1}$  をかけて整理すると

$$\sqrt{T}(\tilde{\theta} - \tilde{\theta}_*) = \left( -\frac{1}{T} \frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta \partial \theta'}(\tilde{\theta}) \right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\partial \log L}{\partial \theta}(\tilde{\theta}_*) + o_p(1). \quad (9.32)$$