で与えられる [6.8.1 項 (☞468 ページ) 参照]。この最大化問題を解いて得られる θ の**制約付き最尤推定量**を $\tilde{\theta}_*$ と書こう。θ に関する制約を考慮しない場合の最尤推定量は，これまでと同様 $\tilde{\theta}$ で表す。

記号の簡略化のために $L(\theta; z_1, \cdots, z_T) \equiv L(\theta)$ と書くと，3 つの検定統計量は以下のように定義される。なお，最初の式の左辺の LR は (9.20) で定義された LR である。

(漸近的) **尤度比検定** (likelihood ratio test)

$$-2\log LR = -2\{\log L(\tilde{\theta}_*) - \log L(\tilde{\theta})\}$$

ワルド検定 (Wald test)

$$W = T h(\tilde{\theta})' \left\{ H(\tilde{\theta}) \tilde{I}_A(\tilde{\theta})^{-1} H(\tilde{\theta})' \right\}^{-1} h(\tilde{\theta}) \tag{9.29}$$

ラグランジュ乗数検定 (Lagrange multiplier test)

$$LM = \frac{1}{T} \left\{ \frac{\partial \log L}{\partial \theta}(\tilde{\theta}_*) \right\}' \tilde{I}_A(\tilde{\theta}_*)^{-1} \left\{ \frac{\partial \log L}{\partial \theta}(\tilde{\theta}_*) \right\}$$

ここで, $\tilde{I}_A$ は $\tilde{I}_A \xrightarrow{p} I_A(\theta_0)$ $(T \to \infty)$ となるような $I_A(\theta_0)$ の推定量である。W においては $\tilde{I}_A(\cdot)$ は $\tilde{\theta}$ を使って, LM においては $\tilde{I}_A(\cdot)$ は $\tilde{\theta}_*$ を使って作られていることに注意しよう。すなわち，Wald (LM) 検定を行うためには，制約なし (制約付き) の最尤推定のみを行えばよい。これに対して，LR 検定を行うためには両方の推定を行う必要がある。

これらの検定統計量は，帰無仮説のもとで漸近的に χ^2_m 分布に従う。この結果を定理 9.7 に対応する形で述べておく。

定理 9.8 $\{Z_t\}_{t=1}^T$ は独立同一分布に従う確率ベクトル列で，定理 *9.7* の仮定がすべて満たされるものとする。$T \to \infty$ のとき，*(9.27)* の帰無仮説のもとで,

$$-2\log LR,\ \ W,\ \ LM \xrightarrow{d} \chi^2_m.$$

＜証明＞ 概略のみ示す。ワルド検定統計量は，定義により

$$W = \sqrt{T} h(\tilde{\theta})' \left\{ H(\tilde{\theta}) \tilde{I}_A(\tilde{\theta})^{-1} H(\tilde{\theta})' \right\}^{-1} \sqrt{T} h(\tilde{\theta}) \tag{9.30}$$

である。これに関しては，補題 8.17 を用いて，定理 9.4 の証明とまったく同じようにして証明できるので省略 (宿題)。

まず，ラグランジュ乗数検定を考えよう。$\sqrt{T}h$ を θ_0 のまわりでテイラー展開して $\tilde{\theta}_*$ で評価すると, $h(\theta_0) = h(\tilde{\theta}_*) = 0$ だから

$$0 = \sqrt{T} h(\tilde{\theta}_*) = \sqrt{T} h(\theta_0) + H(\theta_0) \sqrt{T}(\tilde{\theta}_* - \theta_0) + o_p(1) = H(\theta_0) \sqrt{T}(\tilde{\theta}_* - \theta_0) + o_p(1). \tag{9.31}$$

$T^{-1/2}\partial \log L/\partial\theta$ を $\tilde{\theta}$ のまわりでテイラー展開して $\tilde{\theta}_*$ で評価すると

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\partial \log L}{\partial \theta}(\tilde{\theta}_*) = \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\partial \log L}{\partial \theta}(\tilde{\theta}) + \frac{1}{T} \frac{\partial^2 \log L}{\partial\theta\partial\theta'}(\tilde{\theta}) \sqrt{T}(\tilde{\theta}_* - \tilde{\theta}) + o_p(1).$$

最大化の一階の条件: $\partial \log L(\tilde{\theta})/\partial\theta = 0$ を考慮し，両辺に $\left(T^{-1}\partial^2 \log L(\tilde{\theta})/\partial\theta\partial\theta'\right)^{-1}$ をかけて整理すると

$$\sqrt{T}(\tilde{\theta} - \tilde{\theta}_*) = \left(-\frac{1}{T} \frac{\partial^2 \log L}{\partial\theta\partial\theta'}(\tilde{\theta}) \right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\partial \log L}{\partial \theta}(\tilde{\theta}_*) + o_p(1). \tag{9.32}$$

