

# 計量経済学の基礎

— 統計的手法の理論とプログラミング —

戸田 裕之

山田 宏

# 目次

はじめに	iii
1 章 GNU Octave	1
1.1 Octave を使い始める前に . . . . .	1
1.1.1 X Window System の起動と終了 . . . . .	2
uxterm . . . . .	4
1.1.2 ディレクトリ構造 . . . . .	6
Windows OS + Cygwin のディレクトリ・ツリー . . . . .	6
Mac OS X のディレクトリ・ツリー . . . . .	7
1.1.3 絶対パス名と相対パス名 . . . . .	9
1.1.4 shell での操作 . . . . .	10
1.1.5 emetrics ディレクトリの構成 . . . . .	13
1.2 Octave を使ってみよう . . . . .	14
1.2.1 Octave の起動と終了 . . . . .	14
1.2.2 Octave の基本的な使い方 . . . . .	16
いくつかの便利なコマンド . . . . .	16
変数への数値や文字列の代入 . . . . .	17
Octave による演算 . . . . .	18
1.2.3 入力ミスの修正 . . . . .	19
1.2.4 作業内容の記録 . . . . .	21
1.3 関数 . . . . .	21
1.3.1 Octave 標準の関数 . . . . .	22

---

1.3.2	関数の定義	23
1.3.3	関数ファイル	26
1.4	スクリプト・ファイル	28
1.4.1	スクリプト・ファイルの作成と実行	28
1.4.2	スクリプト・ファイルと関数ファイル	31
1.5	Octave によるグラフ作成	32
1.5.1	2次元グラフ	32
	複数の関数のグラフ	34
	重ね描き	35
1.5.2	3次元グラフ	36
1.6	Octave を使いこなすために	37
1.6.1	ファイル拡張子と LOADPATH	37
1.6.2	入力補完	40
1.6.3	ヘルプ	41
1.6.4	エラー・メッセージ	44
2章	線形代数の準備	47
2.1	行列とベクトル	48
2.1.1	行列	48
2.1.2	ベクトル	49
2.1.3	Octave による行列計算の基礎	51
	Octave の計算結果について	56
2.2	行列の演算	56
2.2.1	行列の和, 差および実数倍	57
2.2.2	行列の積	58
	ベクトルの積	58
	行列の積	59
2.2.3	逆行列の定義	62
2.3	行列計算のルール	64
2.3.1	和と積の基本法則	64
2.3.2	転置行列の計算ルール	65

---

2.3.3	トレースの定義とその計算ルール . . . . .	65
2.3.4	逆行列の計算ルール . . . . .	67
2.3.5	分割行列の計算 . . . . .	68
	行列の分割 . . . . .	68
	分割行列の和と積 . . . . .	69
	分割行列の逆行列 . . . . .	70
	分割行列の転置 . . . . .	70
2.4	ベクトルと線形空間 . . . . .	71
2.4.1	ベクトルと有向線分 . . . . .	72
	長さ, 距離, 角 . . . . .	73
2.4.2	線形独立と線形従属 . . . . .	76
2.4.3	線形部分空間 . . . . .	78
	基底 . . . . .	79
	ベクトルによって張られる線形部分空間 . . . . .	80
2.4.4	直交補空間 . . . . .	82
2.5	行列と線形写像 . . . . .	83
2.5.1	線形写像 . . . . .	84
	行列の階数 . . . . .	85
	正方行列の場合 . . . . .	86
2.5.2	正則行列と階数 . . . . .	88
	逆行列の存在条件 . . . . .	88
	行列の積の階数 . . . . .	90
2.6	行列式 . . . . .	91
2.6.1	行列式の定義と解積 . . . . .	91
	2次正方行列の場合 . . . . .	91
	3次正方行列の場合 . . . . .	94
	一般の場合 . . . . .	95
2.6.2	行列式の性質 . . . . .	97
2.6.3	逆行列の一般公式 . . . . .	100
2.7	固有値と固有ベクトル . . . . .	102

2.8	対称行列の対角化 . . . . .	108
2.8.1	行列の対角化 . . . . .	108
2.8.2	対称行列の対角化 . . . . .	111
2.9	定符号行列 . . . . .	114
2.9.1	2次形式の定符号性 . . . . .	114
2.9.2	定符号行列と固有値 . . . . .	117
	平方根行列 . . . . .	118
2.10	補論 . . . . .	121
2.10.1	行列演算の基本法則 6 (64 ページ) の証明 . . . . .	121
2.10.2	転置行列の計算ルール 3 (65 ページ) の証明 . . . . .	121
2.10.3	トレースの計算ルール 3 (66 ページ) の証明 . . . . .	122
2.10.4	2次の行列式と平行四辺形の面積 (91 ページ) . . . . .	122
2.10.5	行列式の性質 1-7 (98 ページ) の証明 . . . . .	123
2.10.6	分割行列の逆行列 . . . . .	124
3 章	統計学の準備 . . . . .	127
3.1	確率変数と確率分布 . . . . .	128
3.1.1	確率変数 . . . . .	128
3.1.2	分布関数と密度関数 . . . . .	128
3.1.3	期待値と分散 . . . . .	131
3.1.4	いくつかの連続確率分布 . . . . .	132
	一様分布 . . . . .	132
	指数分布 . . . . .	133
	正規分布 . . . . .	134
3.2	確率ベクトルと多次元確率分布 . . . . .	142
3.2.1	2次元確率ベクトルを例とした説明 . . . . .	143
	分布関数と密度関数 . . . . .	143
	周辺密度関数と条件付き密度関数 . . . . .	146
	統計的独立性 . . . . .	148
3.2.2	$n$ 次元確率ベクトルへの一般化 . . . . .	150
3.3	いろいろな期待値 . . . . .	152

3.3.1	確率ベクトルの関数の期待値 . . . . .	153
	確率ベクトルの統計的独立性と期待値 . . . . .	154
3.3.2	ベクトル値関数と行列値関数への一般化 . . . . .	155
3.3.3	確率ベクトルの線形関数の期待値 . . . . .	157
3.3.4	条件付き期待値 . . . . .	161
	繰り返し期待値の公式 . . . . .	162
	最小平均 2 乗誤差予測 . . . . .	164
3.4	確率収束と大数の法則 . . . . .	167
3.4.1	確率収束 . . . . .	167
	チェビシェフの不等式 . . . . .	168
3.4.2	大数の法則 . . . . .	170
	推定量の一致性 . . . . .	171
3.5	多変量正規分布 . . . . .	172
3.5.1	標準および一般の多変量正規分布 . . . . .	172
3.5.2	正規分布の独立性および線形関数の分布 . . . . .	176
	正規分布の独立性 . . . . .	176
	正規分布の線形関数 . . . . .	177
3.5.3	条件付き正規分布 . . . . .	179
3.6	多変量正規分布から派生する分布 . . . . .	182
3.6.1	$\chi^2$ 分布と非心 $\chi^2$ 分布 . . . . .	183
	$\chi^2$ 分布 . . . . .	183
	非心 $\chi^2$ 分布 . . . . .	186
3.6.2	$t$ 分布と非心 $t$ 分布 . . . . .	187
	$t$ 分布 . . . . .	187
	非心 $t$ 分布 . . . . .	189
3.6.3	$F$ 分布と非心 $F$ 分布 . . . . .	190
	$F$ 分布 . . . . .	190
	非心 $F$ 分布 . . . . .	192
3.7	補論 . . . . .	193
3.7.1	無限区間の定積分 (無限積分) . . . . .	193

---

3.7.2	定積分の部分積分法 . . . . .	194
3.7.3	ロピタルの定理 . . . . .	194
3.7.4	偏導関数 . . . . .	195
3.7.5	2重積分 . . . . .	197
3.7.6	分割行列の行列式 . . . . .	200
4 章	Octave によるグラフ作成とプログラミング	203
4.1	Octave による 2 次元・3 次元プロット . . . . .	204
4.1.1	plot 関数の詳細 . . . . .	206
4.1.2	3 次元プロット . . . . .	209
	mesh 関数 . . . . .	209
	contour 関数 . . . . .	212
4.1.3	グラフのカスタマイズ . . . . .	214
	タイトルと軸ラベル . . . . .	215
	表示範囲 . . . . .	215
	replot . . . . .	217
	3 次元プロットにおける視点とスケール . . . . .	218
4.1.4	複数のグラフ . . . . .	219
	subplot 関数 . . . . .	220
	figure 関数 . . . . .	221
4.2	プログラミング入門 . . . . .	222
4.2.1	繰り返し . . . . .	223
	for 反復構造 . . . . .	223
	while 反復構造 . . . . .	227
4.2.2	条件分岐 . . . . .	230
4.2.3	複合条件とループ制御補助 . . . . .	235
	論理和と論理積 . . . . .	235
	break と continue . . . . .	237
4.2.4	プログラムを作成する上での留意点 . . . . .	238
4.3	行列データの読み込みと保存 . . . . .	240
4.3.1	ファイルへの出力 . . . . .	240

---

	save コマンド . . . . .	240
4.3.2	ファイルからの入力 . . . . .	243
	load コマンド . . . . .	243
	テキスト・ファイルからのデータの読み込み . . . . .	244
	表計算ソフトで入力されているデータの読み込み . . . . .	245
4.4	オンライン・マニュアルの使い方 . . . . .	246
4.4.1	オンライン・マニュアルの構造とリンク . . . . .	247
4.4.2	代表的な操作コマンド . . . . .	249
	移動 . . . . .	250
	検索 . . . . .	253
4.5	モンテ・カルロ実験 . . . . .	255
4.5.1	正規乱数と一様乱数 . . . . .	256
	正規乱数 . . . . .	256
	一様乱数 . . . . .	258
4.5.2	経験分布関数と経験密度関数 . . . . .	259
	経験分布関数 . . . . .	259
	経験密度関数 . . . . .	262
4.5.3	モンテ・カルロ実験の具体例 . . . . .	266
	標本平均の分布 . . . . .	267
	一様乱数の変換 . . . . .	271
	中心極限定理 . . . . .	273
4.6	補論 . . . . .	279
4.6.1	__gnuplot_set__ と __gnuplot_raw__ . . . . .	279
	__gnuplot_set__ コマンド . . . . .	279
	__gnuplot_raw__ 関数 . . . . .	280
4.6.2	コマンドによる 3 次元プロットの視点やスケールの変更 . . . . .	280
	rotate 関数 . . . . .	282
4.6.3	経験分布関数と経験密度関数の確率的性質 . . . . .	283
	経験分布関数 . . . . .	283
	経験密度関数 . . . . .	284



5 章	回帰モデルの最小 2 乗推定	287
5.1	最小 2 乗推定量	288
5.1.1	条件付き期待値, 最良線形予測, および線形回帰分析	288
	条件付き期待値と最良線形予測	289
	最小 2 乗法	291
5.1.2	単回帰モデルにおける最小 2 乗推定量の導出	293
	最小 2 乗推定量	294
5.1.3	重回帰モデルにおける最小 2 乗推定量の導出	300
	最小 2 乗推定量	300
5.2	最小 2 乗法統論およびその周辺	306
5.2.1	射影	306
5.2.2	最小 2 乗法の幾何学的説明	313
5.2.3	$\hat{\beta}$ が残差 2 乗和 (5.24) の最小値を与えることの証明	314
5.2.4	部分係数ベクトルの最小 2 乗推定量	315
5.2.5	決定係数および関連する指標	318
	決定係数	319
	重相関係数	320
	自由度調整済決定係数	321
5.3	最小 2 乗推定量の確率的性質	323
5.3.1	データ生成メカニズムに関する仮定	324
5.3.2	最小 2 乗推定量の期待値と分散	326
5.3.3	最小 2 乗推定量の最小分散性	330
	ガウス-マルコフの定理	332
	バイアスと分散のトレード・オフ	335
5.3.4	最小 2 乗推定量の一致性	337
	標本の大きさと最小 2 乗推定量の分散	337
	最小 2 乗推定量の一致性	339
5.4	その他のいくつかのトピックス	343
5.4.1	誤差分散の不偏推定量	343
5.4.2	多重共線関係	346

	完全な多重共線関係 . . . . .	346
	近似的な多重共線関係 . . . . .	349
5.4.3	予測 . . . . .	351
5.4.4	変数変換による線形化 . . . . .	356
5.5	補論 . . . . .	359
5.5.1	ベクトルによる微分 . . . . .	359
5.5.2	多変数関数の最大・最小化 . . . . .	362
	重回帰モデルにおける最小化の 2 階条件 . . . . .	365
5.5.3	部分係数ベクトルの最小 2 乗推定量 . . . . .	365
6 章	回帰係数の信頼領域と仮説検定 . . . . .	367
6.1	回帰係数の信頼区間 . . . . .	371
6.1.1	準備：誤差分散が既知の場合 . . . . .	371
6.1.2	$t$ 分布と信頼区間 . . . . .	374
	信頼区間の幅 . . . . .	377
6.1.3	$t$ 分布に従うことの証明 . . . . .	378
6.2	$t$ 検定 . . . . .	380
6.2.1	$t$ 統計量とその帰無分布 . . . . .	380
6.2.2	$t$ 検定の棄却域と有意水準 . . . . .	384
	対立仮説 . . . . .	384
	両側検定の棄却域 . . . . .	385
	区間推定と両側 $t$ 検定 . . . . .	388
	片側検定の棄却域 . . . . .	388
	$p$ 値 . . . . .	389
6.2.3	対立仮説のもとでの $t$ 統計量の分布 . . . . .	391
6.2.4	$t$ 検定の検出力 . . . . .	393
	片側検定の場合 . . . . .	394
	両側検定の場合 . . . . .	397
	$t$ 検定の一致性 . . . . .	399
6.3	回帰係数ベクトルの信頼領域 . . . . .	402
6.3.1	$F$ 分布と信頼領域 . . . . .	402

6.3.2	信頼領域の作成 . . . . .	405
	簡便な信頼領域作成法 . . . . .	408
6.4	<i>F</i> 検定 . . . . .	411
6.4.1	<i>F</i> 統計量の帰無分布と棄却域 . . . . .	411
	帰無仮説と対立仮説 . . . . .	411
	<i>F</i> 統計量と帰無分布 . . . . .	412
	有意水準と棄却域 . . . . .	414
	<i>p</i> 値 . . . . .	415
6.4.2	対立仮説のもとでの <i>F</i> 統計量の分布 . . . . .	416
6.4.3	<i>F</i> 検定の検出力 . . . . .	419
	<i>F</i> 検定の一致性 . . . . .	423
6.5	制約付き最小 2 乗推定量と <i>F</i> 検定 . . . . .	425
6.5.1	制約付き最小 2 乗推定量 . . . . .	425
	制約付き最小 2 乗推定量の確率的性質 . . . . .	428
6.5.2	残差を使った <i>F</i> 統計量の表現 . . . . .	431
6.5.3	<i>F</i> 検定の例 . . . . .	433
	回帰係数のゼロ制約 . . . . .	433
	構造変化の <i>F</i> 検定 . . . . .	436
6.6	誤差項の系列相関の検定 . . . . .	442
6.6.1	誤差項の系列相関 . . . . .	442
6.6.2	ダービン-ワトソン検定 . . . . .	447
	ダービン-ワトソン比の帰無分布と臨界値 . . . . .	448
	ダービン-ワトソン検定の検出力 . . . . .	451
6.6.3	ダービン-ワトソン検定：伝統的な方法 . . . . .	452
6.7	その他のいくつかのトピックス . . . . .	455
6.7.1	(続) 誤差分散の不偏推定量の性質 . . . . .	455
6.7.2	予測の信頼区間 . . . . .	457
6.7.3	確率的説明変数 . . . . .	459
	最小 2 乗推定量の確率的性質 . . . . .	460
	信頼領域と仮説検定 . . . . .	462

---

6.7.4	誤差項の非正規性と大標本における結果 . . . . .	464
6.8	補論 . . . . .	468
6.8.1	ラグランジュ未定乗数法 . . . . .	468
6.8.2	(6.96) と (6.97) が同一であることの証明 . . . . .	472
6.8.3	ダービン-ワトソン検定における臨界値近似の精度 . . . . .	473
	回帰モデルの仮定一覧	477
	索引	479